Київський національний університет імені Тараса Шевченка

Чисельні методи в інформатиці

**Лабораторна робота № 4**

Повна задача на власні значення

Виконав:

студент другого курсу

групи К-26

факультету кібернетики

Київського національного

університету імені

Тараса Шевченка

Кожухівський Віталій

Київ, 2014

Зміст

1. Постановка задачі
2. Теоретичні відомості
3. Розрахунки
4. Відповідь
5. Висновки

Постановка задачі

Розв'язати повну проблему на власні значення, тобто знайти всі власні числа та фідповідні їм вектори, для заданої матриці:

Теоретичні відомості

Метод обертання Якобі.

Метод застосовуєтся до симетричної матриці A = A^T, і полягає в виконанні ітераційних перетворень, які зводять її до діагонального виду: \Lambda = U A U^T = \mbox{diag}(\lambda_i) — власні числа.

Нехай A — симетрична матриця, а G = G(i,j,\Theta) — матриця [повороту Ґівенса](http://uk.wikipedia.org/wiki/%D0%9F%D0%BE%D0%B2%D0%BE%D1%80%D0%BE%D1%82_%D2%90%D1%96%D0%B2%D0%B5%D0%BD%D1%81%D0%B0). Тоді матриця:

A'=G^\top A G \, 

симетрична та [подібна](http://uk.wikipedia.org/wiki/%D0%9F%D0%BE%D0%B4%D1%96%D0%B1%D0%BD%D1%96_%D0%BC%D0%B0%D1%82%D1%80%D0%B8%D1%86%D1%96) до A.

Елементи матриці A' можна обчислити за формулами:

\begin{align}
 A'_{ii} &= c^2\, A_{ii}  -  2\, s c \,A_{ij}  +  s^2\, A_{jj} \\
 A'_{jj} &= s^2 \,A_{ii}  +  2 s c\, A_{ij}  +  c^2 \, A_{jj} \\
 A'_{ij} &= A'_{ji} = (c^2 - s^2 ) \, A_{ij}  +  s c \, (A_{ii} - A_{jj} ) \\
 A'_{ik} &= A'_{ki} = c \, A_{ik}  -  s \, A_{jk} & k \ne i,j \\
 A'_{jk} &= A'_{kj} = s \, A_{ik}  + c \, A_{jk} & k \ne i,j \\
 A'_{kl} &= A_{kl} &k,l \ne i,j
\end{align}

де s = \sin(\Theta) та c = \cos(\Theta).

Оскільки вони подібні, то A та A' мають однакову [норму Фробеніуса](http://uk.wikipedia.org/wiki/%D0%9D%D0%BE%D1%80%D0%BC%D0%B0_%D0%A4%D1%80%D0%BE%D0%B1%D0%B5%D0%BD%D1%96%D1%83%D1%81%D0%B0) (суму квадратів всіх компонент), тим не менш, ми можемо обрати таке \Theta, що A'_{ij}=0, і A' має більшу суму квадратів на діагоналі:

 A'_{ij} = \cos(2\theta) A_{ij} + \tfrac{1}{2} \sin(2\theta) (A_{ii} - A_{jj}) 

Якщо прирівняти до нуля, і провести перетворення:

 \tan(2\theta) = \frac{2 A_{ij}}{A_{jj} - A_{ii}} 

Щоб оптимізувати цей ефект, A_{ij} обирають найбільшим за модулем недіагональним елементом, що називають *опорним*.

Метод Якобі постійно повторює обертання поки матриця не стане майже діагональною. Тоді елементи на діагоналі стають наближеннями власних значень A.

Наближені значення власних векторів є стовпцями матриці U = \prod_{k=1}^n G_k.

Розрахунки

Очевидно, дана в умові матриця є симетричною. Цього достатньо для корректної роботи методу.

Маючи цю властивість, отримуємо (обраховуючи із точністю ):  
Власні числа:

Та відповідно матрицю власних векторів:

Легко переконатись, що власні числа та вектори є правильними.

Висновки

На симетричних матрицях метод завжди збігається, оскільки на кожній ітерації обнуляються певні елементи, яких скінчена кількість.